3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Ανάλυση Ι

Χειμερινό Εξάμηνο 2019

Διδάσκων: Χρήστος Σαρόγλου

1. Έστω $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ δύο ακολουθίες πραγματικών συναρτήσεων από έναν μετρικό χώρο (X,d) που συγκλίνουν ομοιόμορφα στις f, g αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι $\{f_n+g_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f+g$.

2. Έστω $\{f_n\}$ μία ακολουθία φραγμένων πραγματικών συναρτήσεων από έναν μετρικό χώρο (X,d) που συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Ισχύει ότι η f είναι φραγμένη;

3. Έστω $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ δύο φραγμένες (με την ομοιόμορφη νόρμα) ακολουθίες πραγματικών συναρτήσεων από έναν μετρικό χώρο (X,d) που συγκλίνουν ομοιόμορφα στις f, g αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι $\{f_ng_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην fg.

4. Έστω $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f_n(x)=x+1/n$. Να δειχθεί ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην $f(x)=x$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, αλλά η $\{f_n^2\}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f^2 (άρα αν δύο ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα δεν έπεται ότι και το γινόμενό τους συγκλίνει ομοιόμορφα).

5. Έστω $f, f_1, f_2, \dots$ πραγματικές συναρτήσεις από έναν συμπαγή μετρικό χώρο (X,d). Υποθέτουμε ότι για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $\{x_n\}$ από τον X, ισχύει ότι $f_n(x_n)\to f(\lim x_n)$. Αν η f είναι συνεχής, να δειχθεί ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα.

6. Έστω $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ μία ακολουθία συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε η ακολουθία $\{f_n'\}$ να συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση $g:[a,b]\to\mathbb{R}$. Αν $\{f_n(x_0)\}$ συγκλίνει για κάποιο $x_0\in[a,b]$, να δειχθεί ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια αντιπαράγωγο της g.